

# Zur Einwirkung von periodischen, räumlich verteilten Kräften auf die Schwingungen mechanischer Schwingungsgebilde

Von GERHARD HÜBNER und ERNST LÜBCKE

Aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckert-Werke AG., Berlin-Siemensstadt  
(Z. Naturforschg. **11 a**, 492—498 [1956]; eingegangen am 3. April 1956)

*Herrn Professor TREDELENBURG zum 60. Geburtstag gewidmet*

Es wird eine allgemeine Differentialgleichung aufgestellt und allgemein gelöst für die erzwungenen Schwingungen einer Klasse von linearen mechanischen Schwingungsgebilden, die unendlich viele Freiheitsgrade haben und eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung besitzen. Die auf diese Schwingungsgebilde ausgeübte Kraft wird von der Form  $P(x) \sin \omega t$  in verschiedener räumlicher Verteilung angenommen. Zu dieser Klasse von Schwingern gehören u. a. die Saite, der Stab, der Ring und der Kreisbogen in allgemeiner Form. Die bekannten Lösungen der Probleme erzwungener Schwingungen werden zusammengefaßt und darüber hinaus für weitere Gruppen von Schwingern, deren Eigenfunktionen nicht im üblichen Sinne orthogonal sind, die Lösungen angegeben. Bei der Diskussion ergibt sich, daß für das Eintreten einer Resonanz eine Übereinstimmung der Frequenz der erregenden Kraft und der Frequenz einer Eigenschwingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist. Vielmehr muß die örtliche Kraftverteilung derart sein, daß sie an der zur Eigenfrequenz gehörenden Eigenschwingungsform Arbeit leistet. Die Größe des Resonanzausschlages bei vorgegebener Dämpfung ist dieser Arbeit unmittelbar proportional. Es sind Kraftverteilungen möglich, bei denen diese Kraft nur an einer einzigen Eigenschwingungsform Arbeit leistet, so daß sich bei allen übrigen Eigenfrequenzen keine Resonanzerscheinungen ausbilden können. Es gibt aber auch Kraftverteilungen  $P(x)$ , bei denen für nahezu alle möglichen Eigenfrequenzen Resonanzerscheinungen auftreten können.

Es werden die erzwungenen Schwingungen eines beliebigen linearen Schwingungsgebildes mit verteilter Masse und Elastizität unter der Einwirkung von periodischen, räumlich verteilten Kräften der Form  $P = P(x) \sin \omega t$  untersucht, wenn diese Schwinger der Differentialgleichung  $2m$ -ter Ordnung der Form (4) genügen. Die Lösung dieser Differentialgleichung mit ihren Randbedingungen ermöglicht die Diskussion über das Resonanzverhalten einer ganzen Klasse von mechanischen Schwingungsgebilden. Wesentlich ist dabei, daß auch Schwingungsgebilde zugelassen werden, die auf ein allgemeines Eigenwertproblem führen, deren Eigenfunktionen also im Gegensatz zu den bisher behandelten Fällen nicht im üblichen Sinne orthogonal sind. Durch die Behandlung dieser Klasse von Schwingungsgebilden wird damit nicht nur eine zusammenfassende Darstellung der bisher bekannten Lösungen gegeben, sondern das Problem der erzwungenen Schwingungen einer noch nicht behandelten größeren Gruppe linearer Schwinger einer Lösung zugeführt. In diese Klasse fallen u. a., wie aus Tab. 1 hervorgeht,

1. die schwingende Saite,
2. der Längs-, Quer- und Torsionsschwingungen ausführende Stab, bei dem Rotationsträgheit zugelassen werden kann,

3. der radiale, axiale und tangential Schwingungen ausführende Kreisring oder Kreisbogen.

Die Schwingungsgebilde dieser Art sollen im allgemeinen eine geschwindigkeitsproportionale innere Dämpfung  $b'$  besitzen. Sieht man von einer Dämpfung ab, so kann bei der Saite auch veränderliche Dichte und beim Stab veränderlicher Querschnitt angenommen werden.

Für erzwungene Querschwingungen von Stäben konstanten Querschnitts unter der Einwirkung einer über ihre Länge verteilten pulsierenden Kraft ist von HORT<sup>1</sup> eine (stationäre) Lösung angegeben, die aber wesentlich allgemeiner interpretiert werden kann.

## 1. Allgemeine Lösung des Problems

Die freien Schwingungen der Klasse der hier betrachteten Schwingungsgebilde lassen sich durch die partielle Differentialgleichung

$$M[y] = N \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial y}{\partial t} \right] \quad (1)$$

und  $2m$  lineare, homogene Randbedingungen und 2 Anfangsbedingungen beschreiben. Die der Dämpfung

<sup>1</sup> W. HORT, Z. techn. Phys. **6**, 216 [1925].



für proportionale Größe  $b$  sei von  $x$  und  $t$  unabhängig.

$M[y]$  und  $N[y]$  entsprechen den linearen, homogenen gewöhnlichen Differentialausdrücken \*:

$$M[z] = \sum_{v=0}^m (-1)^v [f_v(x) z^{(v)}(x)]^{(v)}, \quad (2)$$

$$N[z] = \sum_{v=0}^n (-1)^v [g_v(x) z^{(v)}(x)]^{(v)} \quad (3)$$

für  $m > n > 0$  und  $f_m(x) \neq 0$  und  $g_n(x) \neq 0$ .

Die Koordinate  $y = y(x, t)$  ist der Ausschlag in der betrachteten Schwingrichtung und  $x$  die Ordinate des Ortes, bei Kreisringen und Kreisbogen ist  $x$  der Winkel zwischen einem beliebigen und einem fest gewählten Radius.

Die physikalische Bedeutung der Ausdrücke  $M[y]$  und  $N[\ddot{y} + 2b\dot{y}]$  ist für die betrachteten Schwingungsgebilde aus Tab. 1 ersichtlich.

Wirkt auf eines dieser Schwingungsgebilde eine über  $x$  verteilte pulsierende Kraft der Form

$$P = P(x) \sin \omega t,$$

so läßt sich (1) in die Form bringen:

$$M[y] = N\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial y}{\partial t}\right] - p(x) \sin \omega t. \quad (4)$$

$p(x)$  braucht nicht identisch mit der örtlichen Kraftverteilung zu sein, sondern kann u. U. eine Ableitung davon oder  $P(x)$  proportional sein.

Die Separation der partiellen Differentialgleichung (4) gelingt, wenn man für die Lösung  $y(x, t)$  den Ansatz einer Entwicklung nach den Eigenfunktionen  $u_i(x)$  des allgemeinen Eigenwertproblems (7), (8) macht, dagegen aber die Kraftverteilung  $p(x)$  nach dem System der  $N[u_i(x)]$  entwickelt:

$$y(x, t) = \sum_i \varphi_i(t) u_i(x) \quad (5)$$

mit

$$\varphi_i(t) = \int_b^a y N[u_i(x)] dx \quad (5a)$$

und

$$p(x) = \sum_i p_i N[u_i(x)], \quad (6)$$

$$p_i = \int_b^a p(x) u_i(x) dx. \quad (6a)$$

\* Die linearen Differentialausdrücke  $M[y]$  und  $N[y]$  wurden in Anlehnung an L. COLLATZ in der Form (2) und (3) geschrieben, um bei Gl. (7) und (8) an die im COLLATZschen Buch<sup>2</sup> zusammengefaßten Ergebnisse der Eigenwerttheorie anschließen zu können.

Dabei wird also vorausgesetzt, daß das verallgemeinerte Orthogonalsystem der  $N[u_i(x)]$  vollständig ist, was für einen Großteil der interessierenden Schwingungsgebilde mit Sicherheit zutrifft.

Aus (4), (5) und (6) folgt nach durchgeführter Separation:

$$M[u_i(x)] + \lambda_i N[u_i(x)] = 0 \quad (7)$$

mit den Randbedingungen

$$U_\mu[u_i(x)] = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, 2m \quad (8)$$

und

$$\ddot{\varphi}_i + 2b\dot{\varphi}_i + \lambda_i \varphi_i = p_i \sin \omega t. \quad (9)$$

Die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems ist bei COLLATZ<sup>2</sup> angegeben.

Die  $u_i(x)$  bilden ein verallgemeinertes Orthogonalsystem, das als normiert vorausgesetzt sei. Für ein solches System gilt bekanntlich<sup>2</sup>

$$\int_{x=a}^c u_i(x) N[u_k(x)] dx = \delta_{ik} \quad (\delta_{ik} \text{ KRONECKER-Symbol})$$

und im allgemeinen nicht die übliche Orthogonalitätsrelation.

Nach LORD RAYLEIGH<sup>3</sup> ist nach ausgeführter Integration über die Zeit

$$\begin{aligned} \varphi_i = e^{-bt} \left\{ \varphi_i(0) \left( \cos \bar{\omega}_i t + \frac{b}{\omega_i} \sin \bar{\omega}_i t \right) \right. \\ \left. + \frac{\dot{\varphi}_i(0)}{\omega_i} \sin \bar{\omega}_i t \right\} \\ + \frac{p_i}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}_i^2)^2 + (2\omega b)^2}} \sin(\omega t - \psi_i) \end{aligned} \quad (10)$$

mit

$$\bar{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 - b^2} = \sqrt{\lambda_i - b^2} \quad (11)$$

und  $\varphi_i(0)$ ,  $\dot{\varphi}_i(0)$  als Anfangswerte und

$$\psi_i = \arctg \frac{2\omega b}{\omega_i^2 - \omega^2}.$$

Ferner sei die Amplitudenresonanzfrequenz

$$\bar{\omega}_i = \sqrt{\lambda_i - 2b^2} \quad (11a)$$

eingeführt. Die allgemeine Lösung für die erzwungenen Schwingungen eines Schwingungsgebildes der

<sup>2</sup> L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen; S. 46, Leipzig 1949.

<sup>3</sup> LORD RAYLEIGH, Theorie des Schalles I; § 66, S. 87, 1879.

	Differentialgleichung	$M[y]$	$N[\ddot{y} + 2b\dot{y}]$
<i>Die Saite</i> longitudinale Schwingung	$Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\frac{E}{Q} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\ddot{\xi}$
transversale Schwingungen	$Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (u = [\eta(x, t); \xi(x, t)])$	$\frac{S}{Q} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\ddot{u}$
Berücksichtigung von: a) veränderlicher Dichte	$Q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{S}{Q(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\ddot{u}$
b) geschwindigkeits- proportionaler Dämpfung <sup>6</sup>	$Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2b' \frac{\partial \xi}{\partial t} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\frac{E}{Q} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\ddot{\xi} + \frac{2b'}{Q} \dot{\xi}$
c) Kräften der Form $P(x, t) = P(x) \cdot \sin \omega t$ bei geschwindigkeits- proportionaler Dämpfung <sup>6</sup>	$Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b' \frac{\partial u}{\partial t} = S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  $Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b' \frac{\partial u}{\partial t} = S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x) \sin \omega t$	$\frac{S}{Q} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  $\frac{S}{Q} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( p(x) = \frac{P(x)}{Q} \right)$	$\ddot{u} + \frac{2b'}{Q} \dot{u}$  $\ddot{u} + \frac{2b'}{Q} \dot{u}$
<i>Der Stab</i> longitudinale Schwingung	$Qq \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Eq \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\frac{E}{Q} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\ddot{\xi}$
transversale Schwingungen	$Qq \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$	$-\frac{EJ}{Qq} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	$\ddot{u}$
Torsions- schwingungen <sup>7</sup>	$j(x) \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( C(x) \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (\beta = \beta(x, t))$	$\frac{C(x)}{j(x)} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{1}{j(x)} \frac{\partial C(x)}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x}$	$\ddot{\beta}$
Berücksichtigung von: a) veränderlichem Querschnitt	$q(x) Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial x} \left( q(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$  $q(x) Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( J(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0$	$\frac{E}{Q} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{E}{Qq(x)} \frac{\partial q(x)}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}$  $-\frac{J(x)}{q(x)Q} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{2}{q(x)Q} \frac{\partial J}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{q(x)Q} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\ddot{\xi}$  $\ddot{u}$

	Differentialgleichung	$M[y]$	$N[\ddot{y} + 2b\dot{y}]$
b) geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung <sup>8</sup>	$qQ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b' \frac{\partial u}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$	$-\frac{EJ}{Qq} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	$\ddot{u} + \frac{2b'}{Qq} \dot{u}$
c) Kräften der Form $P(x, t) = P(x) \sin \omega t$ bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung <sup>8</sup>	$qQ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b' \frac{\partial u}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = P(x) \sin \omega t$	$-\frac{EJ}{Qq} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \left( p(x) = \frac{P(x)}{Qq} \right)$	$\ddot{u} + \frac{2b'}{Qq} \dot{u}$
d) Rotationsträgheit (s. Anm. <sup>9</sup> )	$qQ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	$-\frac{EJ}{Qq} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	$\left( 1 - \frac{J}{qQ} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [\ddot{u}]$
(s. Anm. <sup>10</sup> )	$qQ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \sigma J_p \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = EJ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\frac{E}{Q} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$	$\left( 1 - \frac{\sigma J_p}{qQ} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [\ddot{\xi}]$
(s. Anm. <sup>11</sup> )	$Q J_p \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - Q \left( \int \Phi^2 dq \right) \frac{\partial^4 \beta}{\partial x^2 \partial t^2} = C \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$	$\frac{C}{Q J_p} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$	$\left( 1 - \frac{\int \Phi^2 dq}{J_p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [\ddot{\beta}]$
Der Kreisring bzw. Kreisbogen	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) = \frac{1}{R^4} \frac{EJ}{Qq} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$	$\frac{1}{R^4} \frac{EJ}{Qq} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$	$\left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) [\ddot{u}]$
Biegeschwingungen in der Kreisebene <sup>12</sup>			
Berücksichtigung von:			
a) geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) + \frac{2b'}{Qq} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2b'}{Qq} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$ $= \frac{1}{R^4} \frac{EJ}{Qq} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$	$\frac{1}{R^4} \frac{EJ}{Qq} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$	$\left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left[ \ddot{u} + \frac{2b'}{Qq} \dot{u} \right]$
b) in radialer Richtung wirkenden Kräften der Form $P(\vartheta, t) = P(\vartheta) \sin \omega t$ bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) + \frac{2b'}{Qq} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2b'}{Qq} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$ $= \frac{1}{R^4} \frac{EJ}{Qq} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) + \frac{1}{Qq} \frac{\partial^2 P(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} \sin \omega t$	$\frac{1}{R^4} \frac{EJ}{Qq} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right)$ $p(\vartheta) = \frac{1}{Qq} \frac{\partial^2 P(\vartheta)}{\partial \vartheta^2}$	$\left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left[ \ddot{u} + \frac{2b'}{Qq} \dot{u} \right]$
Erklärung der Symbole: $Q$ = Dichte; $E$ = Elastizitätsmodul; $S$ = Saitenspannung; $l$ = Länge der Saite bzw. des Stabes; $b'$ = Dämpfungskonstante; $j(x)$ = polares Massenträgheitsmoment pro Längeneinheit; $C(x)$ = Torsionssteifigkeit; $J$ = äquatoriales Flächenträgheitsmoment bezogen auf die neutrale Schicht; $R$ = mittlerer Radius des Kreisringes bzw. Kreisbogens. $\sigma$ = Poisson-Zahl; $J_p$ = polares Flächenträgheitsmoment bezogen auf die Zentrallinie; $\Phi$ = Torsionsfunktion = $z$ -Komponente einer Torsionsverschiebung dividiert durch den Drall (siehe LOVE-TIMPE, § 215).			

 Tab. 1. Die physikalische Bedeutung der Ausdrücke  $M[y]$  und  $N[\ddot{y} + 2b\dot{y}]$  für verschiedene Schwingungsgebilde.

oben definierten Klasse lautet jetzt:

$$y(x, t) = \sum_i e^{-bt} \left\{ \varphi_i(0) \left( \cos \bar{\omega}_i t + \frac{b}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t \right) + \frac{\dot{\varphi}_i(0)}{\bar{\omega}_i} \sin \bar{\omega}_i t \right\} u_i(x) + \sum_i p_i \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}_i^2)^2 + (2\omega b)^2}} \sin(\omega t - \psi_i) u_i(x). \quad (12)$$

Der 2. Summand ist der stationäre Anteil, der im folgenden behandelt werden soll.

## 2. Diskussion der Schwingungsgleichung

Der stationäre Schwingungszustand setzt sich aus einer Summe von Eigenschwingungsformen  $U_i u_i(x)$  mit verschiedenen Amplituden  $U_i$  zusammen, die mit der Frequenz der erregenden Kraft schwingen:

$$y_{st}(x, t) = \sum_i U_i u_i(x) \sin(\omega t - \psi_i). \quad (13)$$

Die Amplituden  $U_i$  sind dabei Produkte der beiden Faktoren  $A_i$  und  $p_i$ :  $U_i = A_i p_i$ .

Der Faktor  $A_i$  hängt von der Frequenz  $\omega$  der erregenden Kraft, der zugehörigen Eigenfrequenz  $\bar{\omega}_i$  und vom Dämpfungsmaß  $b$  ab:

$$A_i = [\omega^2 - \bar{\omega}_i^2]^2 + (2\omega b)^2)^{-1/2}.$$

Dieser bekannte Frequenzfaktor, oft auch als Vergrößerungsfunktion bezeichnet, ist für endliche Frequenzen  $\omega$  nie Null und zeigt für Übereinstimmung von  $\omega$  und irgendeiner der Eigenfrequenzen  $\bar{\omega}_i$  ein Maximum von der Größe  $1/2 b \bar{\omega}_i$ . Liegt die Frequenz der erregenden Kraft  $\omega$  oberhalb der  $n$ -ten Eigenfrequenz  $\bar{\omega}_n$ , so sind alle zu den ersten  $n$  Eigenschwingungsformen gehörenden Faktoren  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) in erster Näherung von  $\bar{\omega}_i$  und  $b$  unabhängig:  $1/\omega^2$ .

Der 2. Faktor  $p_i$  hängt von dem dem Ortsanteil der erregenden Kraft proportionalen  $p(x)$  und von der normierten  $i$ -ten Eigenfunktion  $u_i(x)$  ab.  $p_i$  ist

die  $i$ -te Komponente einer Entwicklung von  $p(x)$  in einer Reihe der verallgemeinerten Eigenfunktionen  $N[u_i(x)]$  und stellt direkt die Arbeit dar, die die Kraft  $p(x)$  an der  $i$ -ten Eigenschwingungsform  $u_i(x)$  leistet [siehe Gl. (6a)]. Bei den bisher gelösten, auf spezielle Eigenwertprobleme führenden Schwingungsproblemen ist im Gegensatz zu dem oben angegebenen das dort <sup>1, 4, 5</sup> definierte  $p_i$  die  $i$ -te Komponente einer Entwicklung von  $p(x)$  in einer Reihe der Eigenfunktionen  $u_i(x)$  selbst. Interessant ist aber, daß der physikalische Inhalt unseres  $p_i$ , gegeben durch die Arbeit und dargestellt durch die Gl. (6a), völlig gleich ist mit der früher definierten entsprechenden Größe. Diese Gleichheit ist auch zu erwarten, da kein prinzipieller Unterschied zwischen dem Schwingungsverhalten eines geraden Stabes – spezielles Eigenwertproblem – und einem gekrümmten Stab – allgemeines Eigenwertproblem – besteht. Wesentlich ist, daß der Faktor  $p_i$  den Wert Null annehmen kann. Dies ( $p_i = 0$ ) ist stets der Fall, wenn  $p(x)$  orthogonal zu  $u_i(x)$  ist.

Die Amplituden  $U_i$  der Eigenschwingungsform zeigen damit nur unter zwei Bedingungen die bekannte Resonanzerscheinung:

1. Die Frequenz  $\omega$  der erregenden Kraft muß mit einer Eigenfrequenz  $\bar{\omega}_i$  übereinstimmen,
2.  $p_i$  darf nicht Null sein.

Liegt eine solche Kraftverteilung  $p(x)$  relativ zu den Eigenschwingungsformen  $u_i(x)$  vor, daß  $p_i$  Null ist, so ist die zugehörige Eigenschwingungsform in dem resultierenden Schwingungszustand nicht enthalten und trotz Übereinstimmung von  $\omega$  und  $\bar{\omega}_i$  tritt dann keine Resonanz ein, diese wird völlig unterdrückt. Stets ist die Amplitude in der Resonanzlage mit dem Faktor  $p_i$  bewertet. Resonanzamplitude:  $p_i/2 b \bar{\omega}_i$ . Ist die Frequenz  $\omega$  größer als die untersten  $n$  Eigenfrequenzen, so sind alle zugehörigen Eigenschwingungsform-Amplituden  $U_i$  im wesentlichen durch die  $p_i$  bestimmt\* und angenähert unabhängig von  $\bar{\omega}_i$ :  $U_i = p_i/\omega^2 = \text{const} \cdot p_i$ .

<sup>4</sup> ST. TIMOSCHENKO, Z. Math. Phys. **59**, 186 [1911].

<sup>5</sup> PHILIP M. MORSE, Vibration and Sound; First Edition, New York und London 1936; S. 98/99 u. S. 125/127.

<sup>6</sup> C. SCHÄFER, Einführung in die theoretische Physik I; S. 624 und 670, 1944.

<sup>7</sup> H. GEIGER u. K. SCHEEL, Handbuch der Physik; S. 358, 1928.

<sup>8</sup> W. HORT, Z. techn. Phys. **6**, 217 [1925].

<sup>9</sup> LOVE-TIMPE, Lehrbuch der Elastizität; Teubner, Berlin und Leipzig 1907, S. 492.

<sup>10</sup> S. Anm. <sup>9</sup>, S. 491.

<sup>11</sup> S. Anm. <sup>9</sup>, S. 492.

<sup>12</sup> S. Anm. <sup>9</sup>, S. 519.

\* Diese Gesetzmäßigkeit wurde von A. SCHWOCH (Akust. Z. **2**, 113 [1937]) für den speziellen Fall einer ebenen Platte, deren Schwingungsverhalten durch ein spezielles Eigenwertproblem beschrieben wird, aufgestellt. Der Gültigkeitsbereich dieses Gesetzes ist nach der oben vorgenommenen Ableitung wesentlich erweitert, er umfaßt eine ganze Klasse von Schwingern, wobei man insbesondere nicht an solche Probleme gebunden ist, deren Eigenfunktionen im üblichen Sinne orthogonal sind.

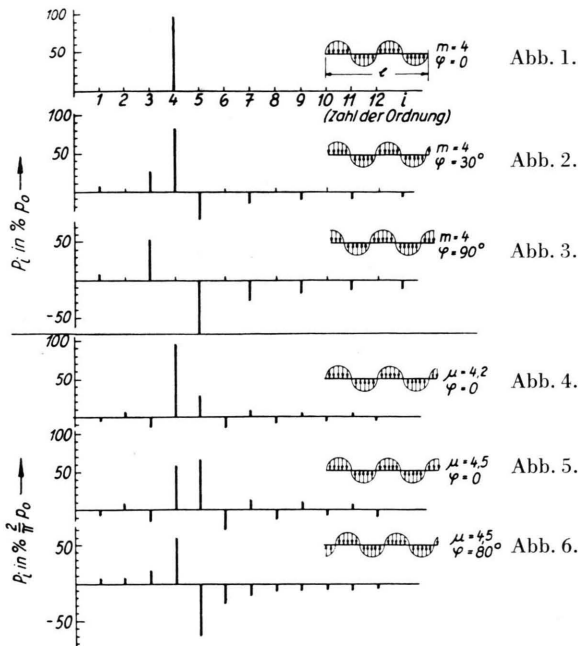


Abb. 1.

Abb. 2.

Abb. 3.

Abb. 4.

Abb. 5.

Abb. 6.

Abb. 7.

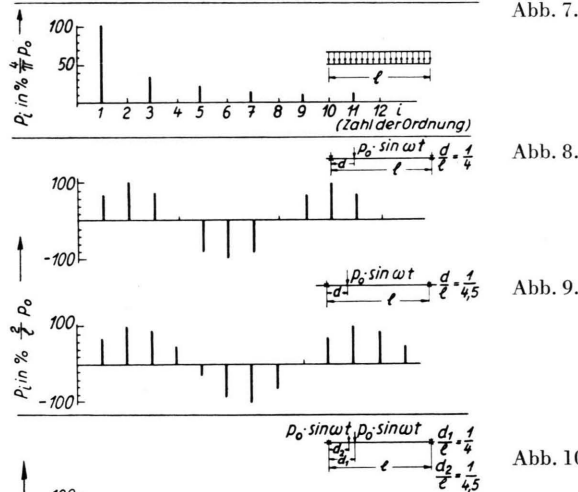


Abb. 8.

Abb. 9.

Abb. 10.

Abb. 1.  $F(x, t) = p_0 \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \omega t$ .

Abb. 2 u. 3.  $F(x, t) = p_0 \sin \left( \frac{m \pi x}{l} - \varphi \right) \sin \omega t$ .

Abb. 4 u. 5.  $F(x, t) = p_0 \sin \frac{\mu \pi x}{l} \sin \omega t$ .

Abb. 6.  $F(x, t) = p_0 \sin \left( \frac{\mu \pi x}{l} - \varphi \right) \sin \omega t$ .

Abb. 7.  $F(x, t) = p_0 \sin \omega t$ .

Für erzwungene Schwingungen mechanischer Gebilde unter örtlich verteilten pulsierenden Kräften hat somit der Bewertungsfaktor  $p_i$  eine mindestens gleichwertige Bedeutung wie der meist diskutierte Frequenz-Faktor  $A_i$ .

### 3. Beispiele

Die vorstehenden, allgemein gültigen Betrachtungen für die örtliche Verteilung der erzwungenen Schwingungen sollen jetzt auf eine spezielle Eigenfunktion angewandt werden.

Für die Saite und die Biegeschwingungen des Stabes zwischen Schneiden sind die Eigenfunktionen durch reine Sinusfunktionen darstellbar.

Wir haben deshalb für eine Eigenfunktion der Form

$$u_i(x) = 2/l \cdot \sin(i \pi x/l) \quad (l = \text{Länge des Schwingers})$$

die  $p_i$  für spezielle Kraftverteilungen berechnet. Die Ergebnisse sind graphisch dargestellt in den Abb. 1 bis 10.

Ist die Kraftverteilung ebenfalls eine Sinusfunktion, so tritt allein für  $\omega_m$  Resonanz ein, wenn die Knotenlagen (nicht nur die Knotenabstände) der  $m$ -ten Eigenschwingungsform und der Kraftverteilung übereinstimmen, während bei allen anderen  $\omega_i$  mit  $i \neq m$  keine Resonanz entstehen kann (siehe Abb. 1). Aber schon eine feste Phasenverschiebung der Knoten dieser Kraftverteilung gegen die Knoten der entsprechenden Eigenschwingungsform bewirkt, daß auch Resonanzen bei anderen Eigenfrequenzen als bei  $\omega_m$  eintreten können (Abb. 2 und 3). Damit sind in diesem Fall auch Resonanzschwingungen möglich, die nicht die gleiche Knotenzahl wie die Kraftverteilung besitzen. Ist der Knotenabstand der Kraftverteilung kein ganzzahliger Bruch der Stablänge, so gilt das zuletzt Gesagte erst recht (Abb. 4, 5 und 6). Während bei Übereinstimmung von Knotenabstand und Knotenlage von allen  $p_i$  nur das eine  $p_m \neq \text{Null}$  ist, sind bei gleichem Knotenabstand aber verschiedener Knotenlage die Hälfte aller  $p_i \neq 0$  und bei ungleichem Knotenabstand und verschiedener Knotenlage alle  $p_i \neq 0$ .

Bei einer über die Stablänge gleichmäßig verteilten Kraft (s. Abb. 7)  $p(x) = p_0 = \text{const}$ , die sinusförmig gleichphasig an jedem Angriffspunkt wechselt, treten nur Schwingungsanteile ungerader Ordnung auf. Die Hälfte aller Schwingungsformen und damit auch Resonanzstellen fällt aus.



Schließlich wurde der Grenzfall einer nicht kontinuierlich verteilten, sondern *punktförmig an einer Stelle angreifenden Kraft untersucht* \*. Durch Änderung der Frequenz der anregenden Kraft erhält man alle Eigenfrequenzen als Resonanzen eines Stabes, außer denen, in deren Eigenschwingungsknoten die Kraft angreift (Abb. 8, 9, 10). Die hier-

bei gemessenen Resonanzamplituden sind aber mit einem Faktor bewertet, der aus Stablänge und relativem Abstand des Angriffspunktes zum nächsten Knoten der jeweiligen Eigenschwingungsform gebildet wird.

\* Dieser Fall wurde für den Stab ohne Dämpfung mit konstantem Querschnitt von TIMOSCHENKO<sup>4</sup> untersucht.

## Das Verhalten von p-n-Gleichrichtern bei hohen Durchlaßbelastungen

Von A. HERLET

Aus dem Laboratorium der Siemens-Schuckert-Werke AG., Pretzfeld  
(Z. Naturforsch. 11 a, 498—510 [1956]; eingegangen am 19. April 1956)

Herrn Professor TRENDLENBURG zum 60. Geburtstag gewidmet

Das Verhalten eines modellmäßig vereinfachten p-n-Gleichrichters bei hohen Durchlaßströmen, d. h. außerhalb des Gültigkeitsbereiches der SHOCKLEYSchen Theorie, wird untersucht. Es wird wesentlich beherrscht von einem „unbegrenzten“ Anwachsen beider Trägerkonzentrationen mit  $\sqrt{i}$  über die Dotierungskonzentration hinaus. Der Spannungsabfall über den Bahngebieten wächst daher nur mit  $\sqrt{i}$ , während der Spannungsabfall über dem Raumladungsgebiet erwartungsgemäß den Grenzwert  $V_D$  anstrebt. Man erhält daher eine quadratische Strom-Spannungs-Charakteristik:  $i \sim (U - V_D)^2$ .

Die SHOCKLEYSche Theorie<sup>1</sup> liefert als Kennliniengleichung eines p-n-Gleichrichters die Beziehung

$$i = e \left\{ p_n \frac{D_p}{L_p} + n_p \frac{D_n}{L_n} \right\} (e^{U/\mathfrak{B}} - 1); \quad \mathfrak{B} = \frac{kT}{e}. \quad (1)$$

Die Gültigkeit von (1) ist an die Voraussetzung niedriger Injektion gebunden, d. h. die Konzentrationen der in die Bahngebiete injizierten Minoritätsträger müssen klein gegen die Majoritätsträgerkonzentration bzw. die Dotierungskonzentration sein. Im Gültigkeitsbereich dieser SHOCKLEYSchen Näherung wird daher die geforderte elektrische Neutralität in den Bahngebieten durch die Beziehungen

$$p = n_A^-, \quad x \leq x_p, \quad (2)$$

$$n = n_D^+, \quad x \geq x_n \quad (3)$$

gewahrt (Abb. 1); die Konzentrationen der Majoritätsträger bleiben auch im Belastungsfall praktisch unverändert. Ferner ist im Bereich der SHOCKLEYSchen Näherung der Spannungsabfall über den Bahngebieten bei vernünftiger geometrischer Abmessung

vernachlässigbar<sup>2</sup>. Die gesamte äußere Spannung wird von der Raumladungszone zwischen  $x_p$  und  $x_n$  aufgenommen und vermindert die dort im stromlosen Zustand vorhandene Diffusionsspannung  $V_D$  (Abb. 1).

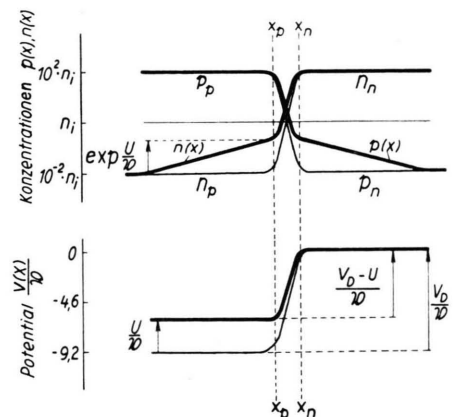


Abb. 1. Konzentrationsverteilungen und Potentialverlauf in einem p-n-Gleichrichter bei niedrigen Injektionen (SHOCKLEYSche Theorie).

<sup>1</sup> W. SHOCKLEY, Bell Syst. Techn. J. 28, 435 [1949].

<sup>2</sup> Streng genommen bedeutet die Spannung  $U$  in (1) den Spannungsabfall über der Raumladungszone. Die vollständige Kennlinie erhält man bei niedrigen Injektionen durch Scherung von (1) mit dem Widerstand der Bahngebiete

(vgl. <sup>3</sup>, S. 78). Freilich wird der Einfluß des Bahnwiderstandes erst stark bemerkbar, wenn die Injektion nicht mehr niedrig ist, und dann gilt (1) nicht mehr.

<sup>3</sup> E. SPENKE, Elektronische Halbleiter, Springer-Verlag 1955.